

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию	3
Предисловие к четвертому изданию	4
Предисловие к третьему изданию	4
Из предисловия к первому изданию	5
Предисловие академика А. Н. Крылова к первому изданию	7

Глава первая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

I. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 1. Объемные силы	15
§ 2. Напряжения	17
§ 3. Компоненты напряжения. Зависимость напряжения от ориентировки площадки	17
§ 4. Уравнения, связывающие компоненты напряжения	20
§ 5. Замена координат. Инвариантная квадратичная форма. Тензор напряжений	23
§ 6. Поверхность напряжений. Главные напряжения	27
§ 7. Нахождение главных напряжений и главных осей	31
§ 8. Случай плоского напряженного состояния	32

II. ДЕФОРМАЦИЯ

§ 9. Общие замечания	35
§ 10. Аффинное преобразование	36
§ 11. Бесконечно малое аффинное преобразование	38
§ 12. Разложение бесконечно малого преобразования на чистую деформацию и жесткое перемещение	40
§ 13. Инвариантная квадратичная форма, связанная с деформацией. Поверхность деформаций, главные оси. Замена координат	45
§ 14. Деформация общего вида	48
§ 15. Определение смещений по компонентам деформации. Условия совместности Сен-Венана	51

III. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 16. Основной закон теории упругости (обобщенный закон Гука)	57
§ 17. Случай изотропного тела	60
§ 18. Основные уравнения статики упругого изотропного тела	64
§ 19. Простейшие случаи упругого равновесия. Основные упругие постоянные	66

§ 20. Основные граничные задачи статики упругого тела. Единственность решения	70
§ 21. Основные уравнения в компонентах смещения	76
§ 22. Уравнения в компонентах напряжения	76
§ 23. Замечание о фактическом решении основных задач. Принцип Сен-Венана	79
§ 24. Динамические уравнения. Об основных задачах динамики упругого тела	79

Глава вторая

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 25. Плоская деформация	87
§ 26. Деформация тонкой пластинки силами, действующими в ее плоскости	90
§ 27. Основные уравнения плоской теории упругости	93
§ 28. Приведение к случаю отсутствия объемных сил	98

II. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 29. Некоторые термины и предложения	100
§ 30. Функция напряжений	103
§ 31. Комплексное представление бигармонической функции	108
§ 32. Комплексное представление смещений и напряжений	110
§ 33. Механическое значение функции f . Выражения для главного вектора и главного момента	113
§ 34. Степень определенности введенных функций	115
§ 35. Общие формулы для конечной многосвязной области	118
§ 36. Случай бесконечной области	122
§ 37. Некоторые свойства, вытекающие из аналитического характера решения. Об аналитическом продолжении через данный контур	127
§ 38. Замена прямоугольных координат	130
§ 39. Полярные координаты	132
§ 40. Основные граничные задачи. Единственность решения	134
§ 41. Приведение основных задач к задачам теории функций комплексного переменного	139
§ 41а. Дополнительные замечания	147
§ 42. Понятие регулярного решения. Единственность регулярного решения	149
§ 43. О сосредоточенных силах, приложенных к границе	153
§ 44. Зависимость напряженного состояния от упругих постоянных	154

III. МНОГОЗНАЧНЫЕ СМЕЩЕНИЯ. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 45. Многозначные смещения. Дислокации	156
§ 46. Температурные напряжения	159

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

§ 47. Конформное отображение	163
§ 48. Простейшие примеры конформного отображения	168
§ 49. Криволинейные координаты, связанные с конформным отображением на круговую область	177
§ 50. Преобразование формул плоской теории упругости	178
§ 51. Граничные условия в преобразованной области	180

*Глава третья***РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ**

I. О РЯДАХ ФУРЬЕ

- § 52. О рядах Фурье в комплексной форме 182
 § 53. О характере сходимости рядов Фурье 185

II. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОКРУЖНОСТЬЮ

- § 54. Решение первой основной задачи для круга 186
 § 55. Решение второй основной задачи для круга 189
 § 56. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием 190
 § 56a. Примеры. 1. Одностороннее растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием. 2. Всестороннее растяжение. 3. Равномерное нормальное давление, приложенное к обводу кругового отверстия. 4. Сосредоточенная сила, приложенная в точке неограниченной плоскости. 5. Сосредоточенная пара 193
 § 57. О сосредоточенных силах вообще 197
 § 57a. Применение к случаю наличия объемных сил 200
 § 58. Некоторые случаи равновесия бесконечной пластинки со вставленной круговой шайбой из другого материала. 1. Бесконечная пластинка с круговым отверстием, в которое вложена упругая круговая шайба, имевшая первоначально несколько больший радиус. 2. Растяжение пластинки со вложенной или впаиванной жесткой шайбой. 3. Растяжение пластинки со вложенной или впаиванной упругой шайбой 201

III. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

- § 59. Решение первой основной задачи для кругового кольца 208
 § 59a. Примеры и обобщения. 1. Труба, подверженная равномерному внешнему и внутреннему давлениям. 2. Распределение напряжений при вращении кольца вокруг центра. 3. Некоторые обобщения 212
 § 60. Многозначные смещения в случае кругового кольца 214
 § 61. Приложение 218
 § 62. Температурные напряжения в полом круговом цилиндре 221

IV. ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

- § 63. Случай односвязной области 224
 § 64. Пример применения отображения на круговое кольцо. Решение основных задач для сплошного эллипса 230

*Глава четвертая***ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ**

I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

- § 65. Некоторые обозначения и термины 236
 § 66. Интегралы типа Коши 239
 § 67. Значения интеграла типа Коши на линии интегрирования. Главное значение интеграла по Коши 240
 § 68. Граничные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля 245

§ 69. О производных интеграла типа Коши	247
§ 70. Некоторые элементарные формулы, облегчающие вычисление интегралов типа Коши	249
§ 71. Об интегралах типа Коши по бесконечной прямой	254
§ 72. Продолжение	261

II. О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 73. Некоторые общие предложения	263
§ 74. Обобщение	266
§ 75. Теорема Гарнака (Harnack)	266
§ 76. Некоторые специальные формулы для круга и полуплоскости	267
§ 77. Простейшие приложения: решение основных задач теории потенциала для круга и полуплоскости	272

Глава пятая

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНИМ ЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

§ 78. Приведение основных задач к функциональным уравнениям	279
§ 79. Приведение к уравнениям Фредгольма. Теоремы существования	283
§ 79а. О некоторых других применениях предыдущих интегральных уравнений	292

II. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА КРУГ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

§ 80. Решение первой основной задачи для круга	293
§ 80а. Примеры. 1. Круговой диск под действием сосредоточенных сил, приложенных к контуру. 2. Диск под влиянием сосредоточенных сил и пар, приложенных к внутренним точкам. 3. Вращающийся диск с прикрепленными сосредоточенными массами	296
§ 81. Решение второй основной задачи для круга	302
§ 82. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием	303
§ 82а. Примеры. 1. Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием. 2. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному давлению. 3. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному касательному напряжению T . 4. Эллиптическое отверстие, часть края которого подвержена равномерному давлению. 5. Приближенное решение задачи об изгибе полосы (балки) с эллиптическим отверстием	306
§ 83. Решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием	314
§ 83а. Примеры. 1. Растяжение бесконечной пластинки с жестким эллиптическим ядром. 2. Случай, когда эллиптическое ядро удерживается от поворота. 3. Случай, когда на эллиптическое ядро действует пара с заданным моментом. 4. Случай, когда на эллиптическое ядро действует сила, приложенная к центру	316

§ 84. Общее решение первой основной задачи для областей, отображаемых на круг при помощи полиномов	318
§ 85. Обобщение на случай отображения при помощи рациональных функций	325
§ 86. Решение второй основной задачи. О решении основной смешанной задачи	329
§ 87. Другой способ решения основных задач	329
§ 87а. Пример. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием	330
§ 88. Дальнейшие примеры. Приложение к некоторым другим граничным задачам	333
§ 89. Приложение к приближенному решению в общем случае	334

III. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 90. Общие формулы и предложения для случая полуплоскости	338
§ 91. Общие формулы для полубесконечных областей	343
§ 92. Основные формулы, связанные с конформным отображением на полуплоскость	346
§ 93. Решение первой основной задачи для полуплоскости	348
§ 93а. Пример	351
§ 94. Решение второй основной задачи	353
§ 95. Решение основных задач для областей, отображаемых на полуплоскость при помощи рациональных функций. Случай параболического контура	355

IV. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ. ОБОБЩЕНИЯ

§ 96. Об интегральных уравнениях С. Г. Михлина	358
§ 97. Об одном общем методе решения задач для многосвязных областей	359
§ 98. Интегральные уравнения, предложенные автором	360
§ 99. Применение к контурам с угловыми точками	368
§ 100. О численном решении интегральных уравнений плоской теории упругости	369
§ 101. Интегральные уравнения Шермана — Лауричелла	369
§ 102. Решение первой и второй основных задач по методу Д. И. Шермана	372
§ 103. О решении основной смешанной задачи и некоторых других граничных задач по способу Д. И. Шермана	379
§ 104. Обобщения на случай анизотропных тел	380
§ 105. О других применениях общих представлений решения	381

Глава шестая

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

I. ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ

§ 106. Кусочно-голоморфные функции	383
§ 107. Задача сопряжения	385
§ 108. Определение кусочно-голоморфной функции по заданному скачку	385

§ 109. Одно приложение	388
§ 109а. Пример	390
§ 110. Решение задачи $F^+ = gF^- + f$	391
§ 111. Случай разрывного коэффициента	401

II. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ
И ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ЩЕЛЯМИ

§ 112. Преобразование общих формул для полуплоскости	404
§ 113. Решение первой и второй основных задач для полуплоскости. 1. Первая основная задача. 2. Вторая основная задача	407
§ 114. Решение основной смешанной задачи	409
§ 114а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. 3. Действие эксцентрически приложенной силы	415
§ 115. Задача давления жестких штампов при отсутствии трения	420
§ 116. Продолжение	424
§ 116а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. 3. Штамп с закругленным основанием	427
§ 117. Равновесие жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения	430
§ 117а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием	433
§ 118. Другой способ решения граничных задач для полуплоскости	434
§ 119. Задача соприкасания двух упругих тел	435
§ 120. Граничные задачи для плоскости с прямолинейными разрезами. 1. Общие формулы. 2. Первая основная задача. 3. Вторая основная задача. 4. Одна смешанная задача	439

III. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ
ОКРУЖНОСТЬЮ, И ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ,
РАЗРЕЗАННОЙ ВДОЛЬ ДУГ ОКРУЖНОСТИ

§ 121. Преобразование общих формул для области, ограниченной окружностью	447
§ 122. Решение первой и второй основных задач для области, ограниченной окружностью	450
§ 123. Основная смешанная задача для области, ограниченной окружностью	452
§ 123а. Пример	456
§ 124. Граничные задачи для плоскости, разрезанной вдоль дуг окружности	457
§ 124а. Пример. Растяжение плоскости с разрезом вдоль дуги окружности	461

IV. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ
НА КРУГ ПРИ ПОМОЩИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 125. Преобразование основных формул	464
§ 126. Решение первой и второй основных задач	469
§ 127. Решение основной смешанной задачи	471
§ 127а. Пример. Решение основной смешанной задачи для плоскости с эллиптическим отверстием	474
§ 128. Задача соприкасания с жестким профилем	476
§ 128а. Примеры. 1. Круговая шайба. 2. Бесконечная плоскость с круговым отверстием. 3. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием	483

Глава седьмая

РАСТЯЖЕНИЕ, КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ
И СОСТАВНЫХ БРУСЬЕВI. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ БРУСЬЕВ
(ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА)

§ 129. Постановка вопроса	492
§ 130. Некоторые формулы	495
§ 131. Общее решение задачи кручения	496
§ 132. Комплексная функция кручения. Функция напряжений	501
§ 133. О решении задачи кручения для различных частных случаев	504
§ 134. Применение конформного отображения	505
§ 134а. Примеры. 1. Эпитрохоидальное сечение. 2. Лемниската Бута. 3. Петля лемнискаты Бернулли. 4. Конфокальные эллипсы. Неконцентрические окружности	508
§ 135. Растяжение продольными силами	512
§ 136. Изгиб парами, приложенными на концах	513
§ 137. Изгиб поперечной силой	516
§ 138. О решении задачи изгиба для различных сечений	521
§ 138а. Пример. Изгиб кругового цилиндра или трубы	521

II. КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ
ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

§ 139. Общие формулы	522
§ 140. Решение при помощи интегральных уравнений	527
§ 140а. Примеры. 1. Кручение кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем из другого материала. 2. Кручение прямоугольного бруса, составленного из двух также прямоугольных брусьев	531

III. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ
ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ
С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

§ 141. Обозначения	539
§ 142. Растяжение	540
§ 143. Изгиб парой	540
§ 144. Изгиб поперечной силой	541
§ 144а. Пример. Изгиб составной круглой трубы поперечной силой, приложенной к одному из концов	544

IV. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ В СЛУЧАЕ РАЗЛИЧНЫХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА

§ 145. Одна вспомогательная задача о плоской деформации	546
§ 146. Задача растяжения и изгиба парами	548
§ 147. Частные случаи. 1. Растяжение бруса, обладающего осью симметрии. 2. Изгиб парой бруса, обладающего плоскостью симметрии	557
§ 148. Главная ось растяжения и главные плоскости изгиба	559
§ 149. Применение комплексного представления. Примеры	564
§ 150. Задача об изгибе поперечной силой	568

Глава восьмая

КРАТКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РАБОТ ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ

I. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА С ОДНИМ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ	
§ 151. Эффективные решения граничных задач для двусвязных областей. Метод Д. И. Шермана	575
§ 151a. Некоторые конкретные задачи	578
§ 152. Пластинки со многими отверстиями. Периодическая задача	580
§ 153. Бесконечная плоскость с одним отверстием	585
§ 154. Продолжение	587
II. КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ СРЕДА. ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ОТВЕРСТИЯ	
§ 155. Включения из того же материала	589
§ 156. Включения из различных материалов	590
§ 157. Усиление отверстий тонкими кольцами	591
III. СПЛОШНАЯ ОДНОРОДНАЯ СРЕДА (СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ). НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	
§ 158. Пластинки с полигональным контуром. Разрывные нагрузки	594
§ 159. Пластинки с границами, уходящими в бесконечность	596
§ 160. Различные специальные вопросы	598
IV. СМЕШАННЫЕ И КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	
§ 161. Смешанные задачи плоской теории упругости и теории изгиба пластинок	600
§ 162. Контактные задачи плоской теории упругости	602
V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБОБЩЕННОМУ БИГАРМОНИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ	
§ 163. Плоская статическая задача теории упругости для анизотропных тел, обладающих плоскостью упругой симметрии	603
§ 164. Стационарные динамические смешанные задачи	605
VI. ТЕОРИЯ ТРЕЩИН	
§ 165. Постановка задач. Основные представления	608
§ 166. Частные задачи	618
VII. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ	
§ 167. Однородные брусья	628
§ 168. Составные брусья	630
VIII. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	
§ 169. Метод суперпозиции плоских решений	631
§ 170. Применение p -аналитических реакций	632

ДОБАВЛЕНИЯ

Д о б а в л е н и е I. О понятии тензора	635
Д о б а в л е н и е II. Об определении функции по ее полному дифференциалу в многосвязной области	648
Д о б а в л е н и е III. Определение аналитической функции комплексного переменного по заданной действительной части. Неопределенный инте- грал от голоморфной функции	657
Д о б а в л е н и е IV. Один вывод формул комплексного представления . . .	661
Цитированная литература	670